♣♣♣♣♣♣♣♣2009 年度 東海大学 解答 ♣♣♣♣♣♣♣

$\boxed{1}$

(1) 計算を進めると、

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$$

となり、

$$\beta = \sqrt{3}-1 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ア}}$$

であり、$\alpha = 2$ なので、

$$\frac{1}{\alpha+\beta+3} + \frac{1}{\alpha-\beta+3} = \frac{1}{4+\sqrt{3}} + \frac{1}{4-\sqrt{3}} = \frac{8}{13} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{イ}}$$

となる。

(2) 公比を r、項数を m と置くと、一般項は $a_n = 3 \times r^{n-1}$ となるので、条件より、

$$\begin{cases} a_m = 3 \times r^{m-1} = 24\sqrt{2} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} 3 \times r^{n-1} = 3 \times \frac{1-r^m}{1-r} = 45\left(\sqrt{2}-1\right) \end{cases}$$

である。よって、

$$\begin{cases} r = \sqrt{2} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ウ}} \\ m = 8 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{エ}} \end{cases}$$

を得る。

(3) $g(x) = (f(f(x)))$ と定義し、$g(x)$ を求る。まず、最初の合成関数を計算すると、

$$f(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2(x-1)}{3}-1\right)}{3} = \frac{4x-10}{9}$$

となり、さらに合成関数を計算すると、

$$g(x) = f(f(f(x))) = \frac{4\left(\frac{2(x-1)}{3}\right)-10}{9} = \frac{8x-38}{27}$$

となる。$g(x)$ が整数 m のとき、

$$x = \frac{27}{8}(m+2) - 2$$

となり、k を整数として、$m = 8k + 2$ のとき $g(x)$ は整数となる。よって最小の自然数は、

$$x = 25 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{オ}}$$

であり、絶対値が最も小さくなる x の絶対値は

$$|x| = \frac{11}{8} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{カ}}$$

となる。

(4) 一度も 6 が出ない余事象を考えると、

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{キ}}$$

となる。また、

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geqq 0.9$$

$$\Rightarrow 0.1 \geqq \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\Rightarrow -1 \geqq n(1 - 2\log_{10} 2 - \log_{10} 3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1} \leqq n \Rightarrow \text{最小の } n \ : \ 13 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ク}}$$

$\boxed{2}$

(1) 直線 AB の方程式を求めると、

$$y-2=\frac{4-2}{3+1}(x+1)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{ア}},\boxed{\text{イ}}$$

となる。

(2) AB の垂直 2 等分線は、傾きが $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=-2$ であり、通る座標が $(1,3)$ である事を考慮して、

$$y=-2(x-1)+3\Rightarrow y=-2x+5\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{ウ}},\boxed{\text{エ}}$$

となる。

(3) 正三角形の一辺の長さは、AB の長さと等しいので、

$$\sqrt{(3+1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{オ}}$$

となる。また、点 C と点 A の距離は、

$$(p+1)^2+(q-2)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{カ}},\boxed{\text{キ}}$$

となる。また、点 C は直線 l 上にあるので、

$$q=-2p+5\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{ク}}$$

を満たす。これらの式より、

$$\begin{cases} p=1+\sqrt{3} & \cdots\cdots\quad\boxed{\text{ケ}} \\ q=3-2\sqrt{3} & \cdots\cdots\quad\boxed{\text{コ}} \end{cases}$$

を得る。

$\boxed{3}$

(1) 楕円上の点 P の接線の方程式は、接線の公式を適用することにより、

$$\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}$$

となる。

(2) AB の直線の方程式から、点 A と点 B の座標を求めると、

$$\begin{cases} \text{点 A}: \left(\dfrac{a}{\cos\theta}, 0\right) \\ \text{点 B}: \left(0, \dfrac{b}{\sin\theta}\right) \end{cases}$$

よって、面積 S は、

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{a}{\cos\theta}\times\frac{b}{\sin\theta}=\frac{ab}{\sin 2\theta} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ウ}}$$

となり、

$$2\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{エ}}$$

のとき S は最小値となる。

(3) L^2 を計算すると、

$$L^2=\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{オ}}$$

となる。また、$t=\cos^2\theta$ とおくと、

$$L^2=\frac{a^2}{t}+\frac{b^2}{1-t}$$

となり、微分計算を実施し、最小値を求めることにより、

$$t=\frac{a}{a+b} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{カ}}$$

のとき最小値をとり、その時の L は

$$L=a+b \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{キ}}$$

となる。