♣♣♣♣♣♣♣2010 年度 東海大学 解答 ♣♣♣♣♣♣♣

$\boxed{1}$

(1)

(i) 接点を (t, t^2) と置くと、接線は

$$y = 2tx - t^2$$

となる。これが、$(a, 0)$ を通るので、
$t = 2a$ を得るので、接点 C の座標は

$$\left(2a, 4a^2\right) \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}$$

となる。

(ii) 三角形 ABC の面積は

$$S = \frac{1}{2} \times (4 - a)\, 4a^2 = 2a^2 (4 - a) \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ウ}}$$

となる。

(iii) S を a で微分すると、

$$\frac{dS}{da} = -6a^2 + 16a = -6a\left(a - \frac{8}{3}\right)$$

となるので、$0 < a < 4$ を考慮すると最大値は

$$a = \frac{8}{3} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{エ}}$$

のとき、

$$\frac{512}{27} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{オ}}$$

を得る。

(2) 初項を a_0、差分を d と置くと、等差数列の一般項は $a_n = a_0 + (n-1)\, d$ であるので、

$$\begin{cases} a_3 = a_0 + d \times 2 = 3 \\ a_7 = a_0 + d \times 6 = 11 \end{cases}$$

よって、$a_0 = -1, d = 2$ となり、一般項は、

$$a_n = 2n - 3 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}}$$

となる。また、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right)$$
$$= -\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ク}}$$

となる。

(3) 点 P は $(2+\cos\theta, \sin\theta)$ と置けるので、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (2, 1)$ と内積をとり、三角関数の合成を用いると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= 2\,(2+\cos\theta)+\sin\theta \\ &= 4+\sqrt{5}\sin\,(\theta+\alpha) \leqq 4+\sqrt{5}\ (\alpha \text{はある定数}) \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ケ}}\end{aligned}$$

また、等号成立の時は、α が、

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

の時であるので、点 P の座標は、この式に、$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ を代入することにより、

$$(2+\cos\theta, \sin\theta) = \left(2+\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{コ}}$$

となる。

$\boxed{2}$

(1) $X=4$ である確率は、

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{40}\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{ア}}$$

となる。$Z=2$ である確率は、連続する 3 枚を選ぶ確率であるから、

$$\frac{8}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{15}\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{イ}}$$

となる。

(2) $X=k$ である確率は、3 枚のうち 1 枚 k が含まれ、ほかのカードが $k-1$ 以下であればよいので、

$$\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{(k-1)(k-2)}{240}\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{ウ}}$$

となる。

(3) (2) と同様に考え、3 枚のうち 1 枚 m が含まれ、そのほかのカードが $m+1$ 以上であればよいので、

$$\frac{{}_{10-m}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{(10-m)(9-m)}{240}\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{エ}}$$

となる。

(4) $Z=n$ の時、最大とカードと最小のカードが $10-n$ 通りで、その中間の数字の取り方が $n-1$ 通りであるので、求める確率は、

$$\frac{(10-n)\,(n-1)}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{(10-n)\,(n-1)}{120}\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{オ}}$$

を得る。

(4) (1) より、求める X の期待値は、

$$\sum_{k=3}^{10}k\times\frac{(k-1)(k-2)}{240}=\frac{33}{4}\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{カ}}$$

3

(1) 微分計算を進めると。

$$\left(\frac{\cos x}{x}\right)' = -\frac{x\sin x + \cos x}{x^2} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ア}}$$

となる。また、$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、$x\sin x + \cos x > 0$ なので、

$$y = \frac{\cos x}{x}$$

は単調減少である。よって値域は

$$0 < x < \infty \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{イ}}$$

となる。

(2) (i) $\cos t - \frac{\cos t}{x}t = 0 \Rightarrow \frac{\cos t}{t} = \frac{\cos x}{x}$ であり、$y = \frac{\cos x}{x}$ は単調減少関数なので解は唯一つであり、

$$t = x \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ウ}}$$

となる。

(ii) 絶対値をはずすように計算を進めると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos t - \frac{\cos x}{x}t\right| dx \\ &= \int_0^x \left(\cos t - \frac{\cos x}{x}t\right) dx - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos t - \frac{\cos x}{x}t\right) dx \\ &= \left[\sin t - \frac{\cos x}{2x}t^2\right]_0^x - \left[\sin t - \frac{\cos x}{2x}t^2\right]_x^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -x\cos x + 2\sin x + \frac{\pi^2\cos x}{8x} - 1 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{エ}} \end{aligned}$$

となる。また、微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x + x\sin x - \pi^2\frac{x\sin x + \cos x}{8x^2} \\ &= (x\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{\pi^2}{8x^2}\right) \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{オ}} \end{aligned}$$

を得る。

(iii) 最小値をとる時の x は (ii) より、

$$x = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{カ}}$$

となる。