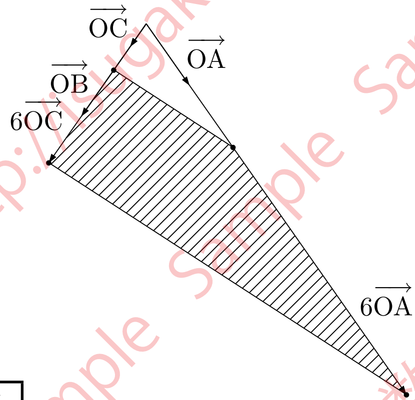
♣♣♣♣♣♣♣♣2012 年度 東海大学 解答 ♣♣♣♣♣♣♣

1

(1) △OAB の面積は、∠BOA $=\theta$ とおくと、



$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA}\cdot \mathrm{OB}\sin\theta$$

であるので、

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 4=\frac{2}{3}$$

となることを考えて、求める面積は、

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{5}\quad\cdots\cdots\quad \boxed{\text{ア}}$$

となる。

また、$4t=k, \dfrac{\overrightarrow{OB}}{4}=\overrightarrow{OC}$ とおくと、

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+4t\frac{\overrightarrow{OB}}{4}=s\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OC}$$

となり、s, k の範囲は、

$$\begin{cases} s\,,\,k\geqq 0 \\ 2\leqq s+k\leqq 6 \end{cases}$$

となる。よって、求める面積は右上図の斜線部になり、白の部分と斜線部の面積比は $1:8$ となるので、

$$8\sqrt{5}\quad\cdots\cdots\quad \boxed{\text{イ}}$$

となる。

(2) $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ と因数分解できるので、条件式に $x=1,-3$ を代入し、その値を 0 とおくことによって、

$$p=13\ ,\ q=-17\quad\cdots\cdots\quad \boxed{\text{ウ}},\boxed{\text{エ}}$$

となる。

(3) すべて異なる確率は、

$$\frac{6}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{5}{9}\quad\cdots\cdots\quad \boxed{\text{オ}}$$

となる。

(4) 三角関数の公式を利用することにより、

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ &= 2\cos\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}\\ &= 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{カ}}\end{aligned}$$

(5) 計算を進めると、

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} &= \frac{\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x\sin^2 x}\\ &= \frac{\cos 2x}{\frac{4\cos^2 x\sin^2 x}{4}}\\ &= \frac{4t}{1-t^2} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{キ}}\end{aligned}$$

(6) $t-t^{-1}$ の計算を進めると、

$$\begin{aligned}\left(t-t^{-1}\right)^2 &= t^2-2+\frac{1}{t^2}\\ &= t^2-2+\frac{1}{t^2}\\ &= \left(t+t^{-1}\right)^2-4\\ &= 529-4=525 \quad \therefore t-t^{-1}=5\sqrt{21} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ク}}\end{aligned}$$

◇◇

◇◇

$\boxed{2}$

(1) 微分計算を進める。

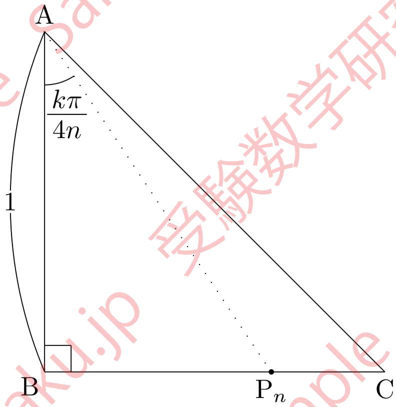
$$\frac{d}{dx}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) = \frac{d}{dx}(\log(1+\sin x) - \log(1-\sin x))$$

$$= \frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{-\cos x}{1-\sin x}$$

$$= \frac{2}{\cos x} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\textbf{ア}}$$

(2)

右図から、



$$\begin{cases} \mathrm{AP_k} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{k\pi}{4n}} & \cdots\cdots \quad \boxed{\textbf{イ}} \\[2ex] \mathrm{BP_k} = \tan\dfrac{k\pi}{4n} & \cdots\cdots \quad \boxed{\textbf{ウ}} \end{cases}$$

となる。よって、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{BP_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan\frac{k\pi}{4n}$$

$$= \int_0^1 \tan\frac{\pi}{4}x\,dx \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\textbf{エ}}$$

となる。積分計算を進めると、

$$\int_0^1 \tan\frac{\pi}{4}x\,dx = -\frac{4}{\pi}\left[\log\cos\frac{\pi}{4}x\right]_0^1 = -\frac{4}{\pi}\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\pi}\log 2 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\textbf{オ}}$$

また、(1) を利用すると、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{AP_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos\dfrac{k\pi}{4n}}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{4}x}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\log\frac{1+\sin\dfrac{4}{\pi}x}{1-\sin\dfrac{4}{\pi}x}\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{\pi}\log\left(\sqrt{2}+1\right) \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\textbf{カ}}$$

3

(1) a_{n+1} を計算すると、

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} = \frac{b_n}{b_n + c_n}$$

となるので、

$$\begin{cases} b_{n+1} = b_n + c_n & \cdots\cdots \boxed{\text{ア}} \\ c_{n+1} = b_n & \cdots\cdots \boxed{\text{イ}} \end{cases}$$

(2) $\boxed{\text{イ}}$ を $\boxed{\text{ア}}$ に代入することにより、

$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1} \quad \therefore p = 1 \quad \cdots\cdots \boxed{\text{ウ}}$$

を得る。$\boxed{\text{ウ}}$ の特性方程式は、

$$x^2 - x - 1 = 0$$

なので、

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} & \cdots\cdots \boxed{\text{エ}} \\ \beta = \dfrac{-\sqrt{5}+1}{2} & \cdots\cdots \boxed{\text{オ}} \end{cases}$$

を得る。

(3) (2) で求めた 2 式より、

$$c_n = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \quad \cdots\cdots \boxed{\text{カ}}$$

となり、

$$b_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

となるから、求める a_n は

$$a_n = \frac{c_n}{b_n} = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha^n - \beta^n} \quad \cdots\cdots \boxed{\text{キ}}$$

となる。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{1 - \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{1 - \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \cdots\cdots \boxed{\text{ク}}$$

を得る。