♣♣♣♣♣♣♣2013 年度 東海大学 解答 ♣♣♣♣♣♣♣

$\boxed{1}$

(1) 絶対値をはずすと、

$$-2 < 3x^2 - 4 < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} < x^2 < 2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} < x < -\frac{\sqrt{6}}{3}\ ,\ \frac{\sqrt{6}}{3} < x < \sqrt{2}\ \cdots\cdots\ \boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}$$

となる。

(2) 等比数列は一般に、

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

とかけるので、$a_1 = 2$、$a_1 + a_2 = a_1 + a_1 r = 8$ なので、

$$a_1 = 2$$

$$r = 3\ \cdots\cdots\ \boxed{\text{オ}}$$

を得る。よって、$a_n = 2 \times 3^{n-1} > 5000 \ \Rightarrow\ 3^{n-1} > 2500$ となる最小の n は

$$\begin{cases} 3^7 = 2187 \\ 3^8 = 6561 \end{cases}$$

であることを考慮すると、

$$n = 9\ \cdots\cdots\ \boxed{\text{カ}}$$

を得る。

(3) 恒等式に対し、$x = 0, 1, 3$ を代入することにより、

$$\begin{cases} a = \dfrac{23}{2} \\ b = -10 \\ c = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

となる。

(4) 与えられた式に対し微分計算をそれぞれ実行すると、

$$\begin{cases} y = e^{2x}\sin x \\ y' = e^{2x}\left(2\sin x + \cos x\right) \\ y'' = e^{2x}\left(4\sin x + 2\cos x + 2\cos x - \sin x\right) = e^{2x}\left(3\sin x + 4\cos x\right) \end{cases}$$

よって、

$$y'' + Ay' + y = e^{2x}\left((A+4)\cos x + (2A+B+3)\sin x\right) = 0$$

$$\Rightarrow A = -4\,,\ B = 5 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{キ}}\,,\ \boxed{\text{ク}}$$

(5) 余弦定理より、

$$\sqrt{3}^2 = \sqrt{7}^2 + 1^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{5}{2} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ケ}}$$

$\boxed{2}$

(1) 底面を OAB とし、V を計算すると、

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6} \quad \cdots\cdots \boxed{\textbf{ア}}$$

となる。また、三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるので、h を用いて V を荒らすと、

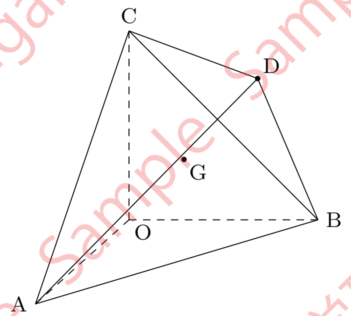
$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}h \quad \cdots\cdots \boxed{\textbf{イ}}$$

となる。よって

$$h = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots \boxed{\textbf{ウ}}$$

を得る。

(2) $\triangle$ABC の中心を G と置くと、(1) における垂線の足は G にあたる。また、正四面体の 4 番目の頂点 D は OG の延長線上にあるので、その座標は一つの変数 t を用いて D(t,t,t) とおける。よって、DA の長さは $\sqrt{2}$ なので、



$$(s-1)^2 + s^2 + s^2 = 2 \Rightarrow s = 1$$

よって D の座標は

$$(1,1,1) \quad \cdots\cdots \boxed{\textbf{エ}}$$

となる。(1) から OG$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ であり、DG$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ となる。よって、V_1 と V_2 の体積比は、点 D を原点とする新たな xyz 空間を考え、半径 $\sqrt{2}$ の球を $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ の平面で分割される体積比と等しい。よって、

$$V_1 = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \pi\left(2-x^2\right)dx = \left[\pi\left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{36\sqrt{2}-28\sqrt{3}}{27}\pi \quad \cdots\cdots \boxed{\textbf{オ}}$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\right)^3 - \frac{36\sqrt{2}-28\sqrt{3}}{27}\pi = \frac{36\sqrt{2}+28\sqrt{3}}{27}\pi \quad \cdots\cdots \boxed{\textbf{カ}}$$

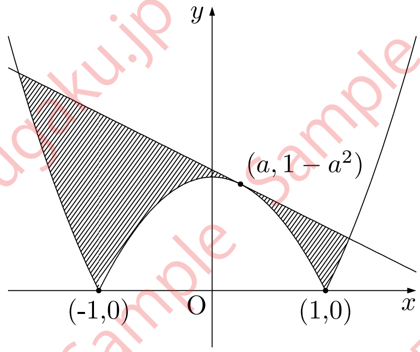
となる。

$\boxed{3}$

(1) $-1 < a < 1$ なので、$y = 1 - x^2$ を微分し、接線の方程式を求めると、

$$y = -2ax + 1 + a^2 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ア}}$$

となる。



(2) (1) で求めた式と、$y = x^2 - 1$ を連立して方程式を解くと、

$$x = -a \pm \sqrt{2a^2 + 2}$$

となる。よって、

$$2a^2 + 2 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{イ}}$$

となる。また、求める面積は右上図のような範囲であり、$x = -1$ から $x = 1$ の範囲を引くことにより、

$$T(a) = \frac{\left\{-a + \sqrt{2a^2+2} - \left(-a - \sqrt{2a^2+2}\right)\right\}^3}{6} - 2 \times \frac{\left(1 - (-1)\right)^3}{6}$$

$$= \frac{4}{3}\left(2a^2 + 2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ウ}}$$

となる。$T(a)$ を微分すると、

$$T(a) = 8a\left(2a^2 + 2\right)$$

となり、$a = \pm\frac{1}{2}$ で最大値をとる。よって、

$$T\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{10} - 8}{3} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{エ}}$$

を得る。

(3) 直線 AP の方程式を求めると、

$$y = -(a+1)x + a + 1$$

となるので、$y = x^2 - 1$ と $x < -1$ の範囲で交点を求めると、

$$x^2 - 1 = -(a+1)x + a + 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+a+2) = 0$$

よって、B の x 座標は $x = -a - 2$ であり、求める面積は

$$\frac{1}{6}(1 + a + 2)^3 = \frac{(a+3)^3}{6} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{オ}}$$

となる。よって $S(a)$ は

$$S(a)=\frac{1}{6}\left(-a^3+15a^2+21a+13\right)\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\textbf{カ}}$$

を得る。

(4) この最大値は (3) による $S(a)$ の最大値を求めばよく、

$$\mathrm{Max}\left(\mathrm{S}\left(\mathrm{a}\right)\right)=\mathrm{S}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{217}{48}\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\textbf{キ}}$$

となる。