♣♣♣♣♣♣♣♣2014 年度 東海大学 解答 ♣♣♣♣♣♣♣♣

$\boxed{1}$

(1) 因数分解を行うと

$$\begin{aligned}x^2-2y^2-xy+x+4y-2 &= x^2-(y-1)x-2(y-1)^2\\ &= (x-2(y-1))(x+(y-1))\\ &= (x-2y+2)(x+y-1) \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\textbf{ア}}\end{aligned}$$

となる。

(2) 計算を進めると、

$$3^{\log_9 8} = 3^{\frac{\log_3 8}{\log_3 9}} = 8^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\textbf{イ}}$$

となる。

(3) $2^x+2^{-x}=t$ とおくと、$t \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$ において、

$$f(x) = \left(2^x+2^{-x}\right)^2 - 2 - 3\left(2^x+2^{-x}\right) + 6 = t^2-3t+4 = \left(t-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

よって

$$x = 0 \ (t=2) \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\textbf{ウ}}$$

の時、最小値

$$f(x=0) = f(t=2) = 2 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\textbf{エ}}$$

をとる。

(4) 計算を進めると、

$$\begin{aligned}\int_1^e (2x+1)\log x\,dx &= 2\int_1^e x\log x\,dx + \int_1^e \log x\,dx\\ &= 2\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - 2\int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx + \Big[x\log x - x\Big]_1^e\\ &= e^2+1-\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e\\ &= \frac{e^2+3}{2} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\textbf{オ}}\end{aligned}$$

となる。

(5) 二つ目の与式を変形すると、

$$(x-a)^2+(y-1)^2=a^2$$

となるので、原点と $(a,1)$ との距離を考えることにより、

$$\sqrt{a^2+1}+a<3$$

であれば共有点を持つことはない。よって、

$$0<a<\frac{4}{3}\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{カ}}$$

を得る。

(6) 条件式を以下のように変形し、相加平均 ≧ 相乗平均の関係式を用いることにより、

$$a+\frac{17}{a+4}=a+4\frac{17}{a+4}-4\geqq 2\sqrt{17}-4$$

となる。よって $a+4=\dfrac{17}{a+4}$ のとき、すなわち

$$a=\sqrt{17}-4\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{キ}}$$

のとき、最小値

$$2\sqrt{17}-4\quad\cdots\cdots\quad\boxed{\text{ク}}$$

を得る。

$\boxed{2}$ $f(x)$ が直線 l と 2 点で接し、さらに $x=p$ で極大値を持つので、その接線の方程式を $y=sx+t$ と置くと、

$$\begin{cases} f(x)=x^2(x-3)^2+sx+t & \cdots\cdots\ ① \\ f'(x)=4x^3-18x^2+18x+s=(x-p)g(x) \ \ (g(x)\text{ は } x \text{ の 3 次関数}) & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

とかける。以下、この式を元に問題に解答する。

(1) $f(0)=f(3)=0$ かつ $f'(0)=f'(3)=0$ なので、$f(x)$ は $x=0,3$ で重解を持つ。よって、

$$f(x)=x^2\left(x-3\right)^2$$

となる。よって

$$f(x)=x^4-6x^3+9x^2 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ア}}$$

を得る。また、

$$f'(x)=4x^3-18x^2+18x=2x(x-3)(2x-3)$$

となり、

$$p=\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{イ}}$$

で極大値を持ち、その値は、

$$f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{4}=\frac{81}{16} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ウ}}$$

となる。

(2) $p=\dfrac{2}{3}$ なので、②から

$$f'\left(\frac{2}{3}\right)=4\left(\frac{2}{3}\right)^3-18\left(\frac{2}{3}\right)^2+18\left(\frac{2}{3}\right)+s=0 \ \Rightarrow s=-\frac{160}{27}$$

となる。また、

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=0 \ \Rightarrow t=\frac{28}{27}$$

を得る。以上から求める直線の方程式は、

$$-\frac{160}{27}x+\frac{28}{27} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}$$

となる。

(3) 直線 l が $y=4x$ なので、

$$f'(x)=4x^3-18x^2+18x+4=2x(x-2)(2x^2-5x-1)$$

となる。これより、

$$x = 2, \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$$

であるので、その大小関係が $\frac{5-\sqrt{33}}{4} < 2 < \frac{5+\sqrt{33}}{4}$ となる事を考えて、

$$p = 2 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{カ}}$$

であり、

$$\frac{5-\sqrt{33}}{4} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{キ}}$$

$$\frac{5+\sqrt{33}}{4} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ク}}$$

となる。

3

(1) $12.5^2 = 156.25$、$12^2 = 144$ である事に着目すると

$$144 < 150 < 156.25 \quad \Rightarrow \sqrt{144} = 12 < \sqrt{150} < 12.5 = \sqrt{156.25}$$

となる。より、

$$a_{150} = 12 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{ア}}$$

となる。

(2) $6 \leqq a_n \leqq 7 \Rightarrow 5.5^2 \leqq n \leqq 7.5^2$ であるので、

$$30.25 < n < 56.25 \Rightarrow 31 \leqq n \leqq 56 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}}$$

となる。また、$a_n = k$ の時、

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \leqq n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$$

であるので、

$$\begin{cases} k^2 - k + 1 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{エ}} \\ k^2 + k \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{オ}} \end{cases}$$

となる。

(3) (2) から $a_n = k$ となる項の個数は $2k$ 個であるので、$a_n = k$ を満たす最大の n が $k^2 + k$ と置ける事に注意すると、

$$\sum_{i=1}^{k^2+k} a_i = \sum_{j=1}^{k} 2j \times j = 2\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{3}$$

となるので、これがおおよそ 1000 程度になる k を探すと、

$$\begin{cases} k = 10 \ \Rightarrow \dfrac{10 \times 11 \times 21}{3} = 770 \\ k = 11 \ \Rightarrow \dfrac{11 \times 12 \times 26}{3} = 1012 \end{cases}$$

となる。よって $n = 11^2 + 11 = 132$ の時、1012 となり、$n = 131$ の時、1001、$n = 130$ の時、990 となるので求める答えは

$$\begin{cases} a_n = 11 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{カ}} \\ n = 131 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{\text{キ}} \end{cases}$$

を得る。

(4) $a_n = k$ の時、(1) より

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq n < \left(k+\frac{1}{2}\right)^2$$

を満たす。よって、

$$\left(\sqrt{2}k-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \leqq 2n < \left(\sqrt{2}k+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

となり、さらに変形すると、

$$\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}k}\right) \leqq \frac{\sqrt{2n}}{k} < \left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}k}\right) \quad \cdots\cdots \quad ①$$

よって、$n\to\infty$ の時、$k\to\infty$ となり、①ははさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{k} = \sqrt{2}$$

となる。ここで、$\dfrac{\sqrt{2n}}{k}$ は

$$\begin{cases} \sqrt{2n} = a_{2n} + \alpha \quad \left(-\dfrac{1}{2} < \alpha < \dfrac{1}{2}\right) \\ k = a_n \end{cases}$$

とかける事に注意すると、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n,k\to\infty}\frac{\sqrt{2n}-\alpha}{k} = \sqrt{2} \quad \cdots\cdots \quad \boxed{ク}$$

を得る。