♠♠♠♠♠♠♠2011 年度 大阪大学 入試問題 ♠♠♠♠♠♠♠

大問 5 題　150 分

$\boxed{1}$ a を自然数とする。O を原点とする座標平面で行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする。

(1) $r > 0$ および $0 \leqq \theta < 2\pi$ を用いて $A = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ と表すとき，r,$\cos\theta, \sin\theta$ を a で表せ。

(2) 点 $\mathrm{Q}_1(1, 0)$ に対し，点 $\mathrm{Q}_n(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を

$$\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q},\ \mathrm{Q}_{n+1} = f(\mathrm{Q}_2)$$

で定める。 $\triangle \mathrm{OQ}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ の面積 $S(n)$ を a と n を用いて表せ。

(3) f によって点 (2, 7) に移されるものと点 P の x 座標の小数第 1 位を四捨五入して得られる近似値が 2 であるという。自然数 a の値を求めよ。またこのとき $S(n) > 10^{10}$ となる最小の n 値を求めよ。ただし $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ を用いてよい。

$\boxed{2}$ 実数 θ が動くとき,xy 平面上の動点 $\mathrm{P}(0, \sin\theta)$ および $\mathrm{Q}(8\cos\theta, 0)$ を考える。θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする。D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{3}$ 実数の組 (p, q) に対し，$f(x) = (x-p)^2 + q$ とおく。

(1) 放物線 $y = f(x)$ が点 $(0, 1)$ を通り，しかも直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接するような実数の組 (p, q) と接点の座標を求めよ。

(2) 実数の組 (p_1, q_1),(p_2, q_2) に対して，$f_1(x) = (x-p_1)^2 + q_1$ および $f_2(x) = (x-p_2)^2 + q_2$ とおく。実数 α, β(ただし $\alpha < \beta$) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \text{ かつ } f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば，区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において不等式 $f_1(x) < f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ。

(3) 長方形 $R : 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 2$ を考える。また，4 点 $\mathrm{P}_0(0, 1), \mathrm{P}_1(0, 0), \mathrm{P}_2(1, 1), \mathrm{P}_2(1, 0)$ をこの順に結んで得られれる折れ線を L とする。実数の組 (p, q) を，放物線 $y = f(x)$ と折れ線 L が共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，R の点のうちで放物線 $y = f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする。R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。

$\boxed{4}$ a, b, c を定数とし，x の関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。以下，定数はすべて実数とする。

(1) 定数 p, q に対し，次を満たす定数 r が存在することを示せ。

$x \geqq 1$ ならば $|px + q| \leqq rx$

(2) 恒等式 $(\alpha - \beta)(a^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$ を用いて，次を満たす定数 k, l が存在することを示せ。

$x \geqq 1$ ならば $\left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \leqq \dfrac{l}{x}$

(3) すべての自然数 n に対して，$\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする。このとき関数 $f(x)$ は，自然数の定数 m を用いて $f(x) = (x + m)^3$ と表されることを示せ。

$\boxed{5}$ 正数 r に対して $a_1 = 0, a_2 = r$ とおき，数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定める。

$$a_{n+1} = a_n + r_n(a_n - a_{n-1})(n = 2, 3, 4, \ldots)$$

ただし a_n と $a_{n=1}$ から漸化式を用いて a_{n+1} を決める際には硬貨を投げ，表がでたとき $r_n = \dfrac{1}{2r}$ とする。ここで表がでる確率と裏が出る確率は等しいとする。a_n の期待値を p_n とするとき，以下の問に答えよ。

(1) p_3 および p_4 を r を用いて表せ。

(2) $n \geqq 3$ のときに p_n を n と r を用いて表せ。

(3) 数列 $\{p_n\}$ が収束するような正数 r の範囲を求めよ。

(4) r が (3) で求めた範囲を動くとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ の最小値を求めよ。