♠♠♠♠♠♠♠2011 年度 島根大学 入試問題 ♠♠♠♠♠♠♠

大問 4 題　120 分

$\boxed{1}$ m を自然数とする。$2^m!$ が 2^n で割り切れる自然数 n の最大値を $N(m)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $N(5)$ を求めよ。

(2) $N(m)$ を m の式で表せ。

(3) $N(m)$ が素数ならば，m も素数であることを証明せよ。

$\boxed{2}$ 半径 1 の球を O_1 とし，O_1 に内接する立方体を B_1 とする。次に立方体 B_1 に内接する球を O_2 とし，球 O_2 に内接する立方体を B_2 とする。以下この操作を繰り返してできる球を O_n，立方体を $\mathrm{O}_n(n=3,\ 4$ $,\cdots)$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 立方体 B_1 の 1 辺の長さ l_1 を求めよ。

(2) 球 O_n の半径 r_n を n を用いて表せ。

(3) 球 O_n のの体積を V_n とし，$S_k=V_1+V_2+\cdots+V_k$ とするとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} S_k$ を求めよ。

$\boxed{3}$ $U=\left\{k|k\text{ は自然数, }1\leqq k\leqq 25\right\}$ を全体集合とし，U の部分集合 A，B を次のように定める。

$$A=\left\{k|k\in U\text{ かつ }k\text{ は }3\text{ の倍数}\right\},\ B=\left\{k|k\in U\text{ かつ }k\text{ は }4\text{ の倍数}\right\}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 つの集合 A ∩ B, A ∪ B を，要素を並べる方法で表せ。

(2) m と n を自然数とし，2 次方程式

$$(*)\qquad x^2-mx+n=0$$

が整数解をもつとする。このとき，n が素数ならば 2 次方程式 (*) は 1 を解としてもつことを証明せよ。

(3) m，n を集合 $\overrightarrow{A}\cup\overrightarrow{B}$ の要素とする。このとき，2 次方程式 (*) の解がすべて 2 以上の整数となる m と n の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。ただし，$\overrightarrow{A}$ と $\overrightarrow{B}$は，それぞれ, AとBの補集合を表す。

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ の増減，極値，グラフの凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ。

(2) 関数 $y = \log(x + \sqrt{x^2+1}) - ax$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$ を求めよ。