♠♠♠♠♠♠♠2013 年度 鳥取大学 入試問題♠♠♠♠♠♠♠

大問 4 題　120 分

$\boxed{1}$ 方程式 $7x + 13y = 1111$ を満たす自然数 x，y に対して，次の問いに答えよ。

(1) この方程式を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ はいくつあるか求めよ。

(2) $s = x + 2y$ とするとき，s の最大値と最小値を求めよ。

(3) $t = |2x - 5y|$ とするとき，t の最大値と最小値を求めよ。

◇◇◇

$\boxed{2}$ 自然数の数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 項に次の関係式が成り立つ。

$$\frac{a_{n+1}}{a_n^2} = 3^n (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

また，$a_1 = 1$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $b_n = \log_3 a_n$ とおくとき，b_n を n の式で表せ。

(2) $a_n \geqq 10^{100}$ となる最小の n を求めよ。ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

◇◇◇

$\boxed{3}$ a，b を正の定数とする。曲線 $y = e^{-ax}\sin bx (x \geqq 0)$ と x 軸とで囲まれた図形で x 軸の下側にある部分の面積を，y 軸に近い方から順に S_1，S_2，S_3，$\cdots$ とするとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{n} S_n$ を求めよ。

◇◇◇

$\boxed{4}$ 実数 t の関数 $\alpha(t)$，$\beta(t)$ を $\alpha(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$，$\beta(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ で定める。実数の定数 p に対して点 P(x, y) の x 座標および y 座標を，複素数

$$z=\frac{ip\alpha(t)+\beta(t)}{ip\beta(t)+\alpha(t)}$$

の実部および虚部でそれぞれ与える。ただし i は虚数単位とする。

(1) $\left\{\alpha(t)\right\}^2-\left\{\beta(t)\right\}^2=1$ となることを示し，x，y を t の関数として表せ。

(2) 点 P の x 座標 の $t\to\infty$ および $t\to-\infty$ のときの極限値をそれぞれ求めよ。

(3) $p\neq 0$ のとき，点 P の描く曲線を x と y の関係式で表せ。

◇◇◇