♠♠♠♠♠♠♠2013 年度 名古屋大学 入試問題♠♠♠♠♠♠♠

大問 4 題　150 分

$\boxed{1}$ 3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い（アイコのときは誰も脱落しない），勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1) p_1，q_1 を求めよ。

(2) p_1，q_1 が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3) ちょう n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

◇◇◇

$\boxed{2}$ $x > 0$ とし，$f(x) = \log x^{100}$ とおく。

(1) 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x}$$

(2) 実数 a の整数部分（$k \leqq a < k+1$ となる整数 k）を [a] で表す。整数，[f(1)]，[f(2)]，[f(3)]，$\cdots$，[f(1000)] のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば $\log 10 = 2.3026$ として計算せよ。

◇◇◇

$\boxed{3}$ k, m, n は整数とし，$\geqq 1$ とする。${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$, $T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \qquad S_(k)1) = 1(k \geqq 0)$$

$$Tm(n) = {}_m\mathrm{C}_1 S_1(n) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(n) + {}_m\mathrm{C}_3 S_3(n) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(n) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(n) \qquad (m \geqq 2)$$

(1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3) p が 3 以上の素数のときは，$S_k(p-1)(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを示せ。

◇◇◇

$\boxed{4}$ 半径 1 の円盤 C_1 が半径 2 の円盤 C_2 に貼り付けられており，2 つの円盤の中心は一致する。C_2 の周上にある定点を A とする。図のように，時刻 $t=0$ において C_1 は O (0, 0) で x 軸に接し，A は座標 (0, -1) の位置にある。2 つの円盤は一体となり，C_1 は x 軸上をすべることなく転がっていく。時刻 t で C_1 の中心が点 $(t,\ 1)$ にあるように転がるとき，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において A が描く曲線を C とする。

(1) 時刻 t における A の座標を $(x(t),\ y(t))$ で表す。$(x(t),\ y(t))$ を求めよ。

(2) $x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減を調べ，$x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの A の座標を全て求めよ。

(3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

◇◇◇